

5/19/2015

Πρόταση: Έστω $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \in \mathbb{N}$ και $(a_i, a_j) = 1, k \leq i \neq j \leq k$. Τότε:
 $(a_{k+1}, a_1 a_2 \dots a_k) = (a_{k+1}, a_1) (a_{k+1}, a_2) \dots (a_{k+1}, a_k)$

Θεώρημα: Έστω $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ μια ρηθμική συνάρτηση και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$,
 $(a_i, a_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n$
 Τότε: $f(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n)$

Απόδειξη: Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Εξάγωγης στο n . Όταν $n=1$,
 τότε $f(a_1) = f(a_1)$
 Αν $n=2$, τότε $(a_1, a_2) = 1$ και τότε εφ' όψει $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$
 Προδίδεται ότι το αποτέλεσμα ισχύει για n το ρηθμικό φυσικό
 αριθμ. δεικνύει αν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ και $(a_i, a_j) = 1, k \leq i \neq j \leq n$
 τότε:

$$f(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n)$$

Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{N}, (a_i, a_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n+1$

Τότε: $f(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) =$

Δείχνουμε πρώτα ότι: $(a_{n+1}, a_1 a_2 \dots a_n) = 1$

Αν $d = (a_{n+1}, a_1, \dots, a_n) > 1$, τότε ο d έχει έναν πρώτο διαιρέτη p
 και τότε: $p \mid a_{n+1}$

$$p \mid a_1 a_2 \dots a_n \xRightarrow{p: \text{πρώτος}} \{k=1, \dots, n: p \mid a_k\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \Rightarrow p \mid (a_{n+1}, a_k) = 1 \text{ άρα } d = 1 \right.$$

$$= f(a_1 \dots a_n a_{n+1}) \stackrel{n=2}{=} f(a_1 \dots a_n) f(a_{n+1}) \stackrel{\text{εξάγωγ.}}{=} f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n) f(a_{n+1})$$

Πρόταση: Έστω $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ μια πολλαπλή συνάρτηση και $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ πρωτογενής ανάλυση του $n > 1$.

$$\text{Τότε: } f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \dots f(p_k^{a_k})$$

Απόδειξη: Επειδή $\forall 1 \leq i \neq j \leq k \quad p_i \neq p_j \Rightarrow (p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1, 1 \leq i \neq j \leq k$.

Διότι αν $(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = d > 1$ τότε ο d θα είχε έναν πρώτο διαιρέτη q και τότε $\begin{cases} q | p_i^{a_i} \xrightarrow{q: \text{πρώτος}} q | p_i \Rightarrow q = p_i \\ q | p_j^{a_j} \xrightarrow{q: \text{πρώτος}} q | p_j \Rightarrow q = p_j \end{cases} \Rightarrow p_i = p_j$. Άρα το

$$\text{Από το ΘΕΩΡΗΜΑ} \Rightarrow f(n) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \dots f(p_k^{a_k})$$

Πρόταση: Έστω $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, δύο πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις και υποθέτουμε ότι:

$$\forall a \geq 1, \text{ } \forall p: \text{πρώτος: } f(p^a) = g(p^a). \text{ Τότε } f = g$$

Απόδειξη: $\forall n \geq 1: n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ και τότε $f(n) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_k^{a_k}) = g(p_1^{a_1}) \dots g(p_k^{a_k}) = g(n)$
 $f(1) = 1 = g(1)$. Άρα $f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = g$

$$m \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{A} \quad \text{Αν } f, g \in \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f * g \in \mathcal{U}: (f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d) g(\frac{1}{d}) = \sum_{d \neq 1} f(d) g(\frac{1}{d}) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1} \in \mathcal{U}: f * f^{-1} = \varepsilon \Rightarrow (f * f^{-1})(1) = \varepsilon(1) \Rightarrow f(1) f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Αν } f, g \in m \stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{cases} f * g \in m \\ f^{-1} \in m \end{cases}$$

ΛΗΜΜΑ: Έστω $m, n > 1$ και υποθέτουμε ότι: $(m, n) = 1$. Αν $d | mn$,
 τότε: $d = d_1 d_2$, όπου: $d_1 | m$, $d_2 | n$, $(d_1, d_2) = 1$ και $\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = 1$.

Απόδειξη: Θεωρούμε πρωτογενείς αριθμούς των m, n :
$$\begin{cases} m = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} \\ n = q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s} \end{cases}$$

 όπου $p_i \neq q_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$.

Τότε: $m \cdot n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} \cdot q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}$: πρωτογενής ανάλυση του mn .

Αν $d | mn \Rightarrow d = \underbrace{p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}}_{d_1} \underbrace{q_1^{k_1} \cdots q_s^{k_s}}_{d_2}$, όπου:
$$\begin{cases} 0 \leq b_i \leq a_i, 1 \leq i \leq r \\ 0 \leq k_j \leq b_j, 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

Θέτουμε: $d_1 = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ $d = d_1 d_2$

$d_2 = q_1^{k_1} \cdots q_s^{k_s}$ τότε $d_1 | m$
 $d_2 | n$

Επειδή $p_i \neq q_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, έπεται ότι $(d_1, d_2) = 1$.

Αν $x = \left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) > 1$, τότε $\exists$ πρώτος $p | x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} p | \frac{m}{d_1} \\ p | \frac{n}{d_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{d_1} = p y \\ \frac{n}{d_2} = p z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p y d_1 \\ n = p z d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p | m \\ p | n \end{cases} \Rightarrow p | (m, n) = 1 : \text{ατοπία} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = 1$

Έστω ότι $d = d_1 d_2 = d'_1 d'_2$ όπου $(d'_1, d'_2) = 1$ και $\begin{cases} d'_1 | m \\ d'_2 | n \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Rightarrow d'_1 = p_1^{b'_1} \cdots p_r^{b'_r}, \text{ όπου } 0 \leq b'_i \leq a_i, 1 \leq i \leq r \\ \Rightarrow d'_2 = q_1^{k'_1} \cdots q_s^{k'_s}, \text{ όπου } 0 \leq k'_j \leq b_j, 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1^{B_1} \dots p_r^{B_r} q_1^{K_1} \dots q_s^{K_s} = p_1^{B'_1} \dots p_r^{B'_r} q_1^{K'_1} \dots q_s^{K'_s} \text{ α } B_1=B'_1, B_r=B'_r, K_1 \leq K'_1, \dots, K_s \leq K'_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = d'_1, K' d_2 = d'_2 \quad \square$$

Πρόταση $\forall f, g \in m: f * g \in m$

Απόδειξη: Αν $(m, n) = 1$, τότε: $(f * g)(mn) = (f * g)(m) (f * g)(n)$

Υπεισάμεθα ότι $f * g \neq 0$, διότι:

$$(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

$$(f * g)(mn) = \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | mn \\ d_1 | m, d_2 | n \\ (d_1, d_2) = 1 \\ \left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = 1}} f(d_1)g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) =$$

$$= \sum_{d_1 | m, d_2 | n} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = \sum_{d_1 | m} f(d_1) f(d_2) g\left(\frac{m}{d_1}\right) g\left(\frac{n}{d_2}\right) =$$

$$(d_1, d_2) = 1 \Rightarrow \left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = 1$$

$$= \sum_{d_1 | m} f(d_1) g\left(\frac{m}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2 | n} f(d_2) g\left(\frac{n}{d_2}\right) =$$

$$= (f * g)(m) (f * g)(n) \Rightarrow f * g \in m$$

□

Πρόταση $\forall f \in m \Rightarrow f^{-1} \in m$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $f, g \in A$. Τότε: $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}: (f \cdot g)(n) = f(n)g(n)$
 Αν $f, g \in m \Rightarrow f \cdot g \in m$, διότι $(f \cdot g)(1) = f(1)g(1) = 1 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow f, g \neq 0$.
 Αν $(n, m) = 1$, τότε: $(f \cdot g)(nm) = f(nm)g(nm) = f(n)f(m)g(n)g(m) =$
 $= (f \cdot g)(n) (f \cdot g)(m)$

Παράδειγμα, αν $g(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} \in m, \text{ αν } f, g \in m$$

Παράδειγμα ①: Η συνάρτηση $V: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, V(n) = 1 \neq 0$ και $V(nm) = 1 = V(n)V(m)$
 Άρα $V \in m$

②: $f \in m \Rightarrow F \in m$ όπου $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, F(n) = \sum_{d|n} f(d)$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(d) \cdot 1 = \sum_{d|n} f(d) V\left(\frac{n}{d}\right) = (f * V)(n), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$f \in m \Rightarrow F = f * V \in m$$

Παράδειγμα $\forall k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση: $\sigma_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

• $k=0 \Rightarrow \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^0 = \sum_{d|n} 1 = \varphi(n)$ φωνικών διαπεριων τα $n =$

$$= T(n) \Rightarrow \boxed{\sigma_0 = T}$$

• $k=1 \Rightarrow \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d^1 = \text{αριθμητικη φωνικων διαπεριων τα } n = \sigma(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \sigma}$$

Ορίζουμε $N^k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, N^k(n) = n^k$. Τότε $N^k \in m$, διότι

$$N^k(1) = 1^k = 1 \neq 0 \text{ και:}$$

$$N^k(nm) = (nm)^k = n^k \cdot m^k = N^k(n) N^k(m). \text{ Άρα } \boxed{N^k \in m}$$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k = \sum_{d|n} N^k(d) = \sum_{d|n} N^k(d) \cdot 1 = \sum_{d|n} N^k(d) V\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= (N^k * V)(n) \Rightarrow \boxed{\sigma_k = N^k * V}$$

Επειδή $N^*, \forall m \ni \sigma_k \in m$ | διαφορετικά, αν $k=0 \ni T \in m$
 $k=1 \ni \sigma \in m$

$$n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}, \text{ τότε } T(n) = T(p_1^{a_1}) \cdot T(p_k^{a_k}) = (1+a_1) \cdot (1+a_k)$$

Διαμέτρης p^a : $1, p, p^2, \dots, p^{a-1}, p^a \ni \sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \dots + p^a$
 p : πρώτος

$$n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \Rightarrow \sigma(n) = \sigma(p_1^{a_1}) \cdot \sigma(p_k^{a_k}) = \\ = (1 + p_1 + \dots + p_1^{a_1}) \cdot (1 + p_k + \dots + p_k^{a_k})$$

σ, T δείχνει $\sigma, T \in m$

$$\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \exists \text{ πρώτος } p: p^2 | n \end{cases}$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, g(n) = \begin{cases} (-1)^k, & n = p_1 \dots p_k \\ \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \begin{matrix} 1 \leq k \leq n \\ (k,n)=1 \end{matrix} \right\} \right| \end{cases}$$

$$v: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, v(n) \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sigma \sigma_0 \quad v^{-1} = f$ Θα δείχνει στο επόμενο παράγραφο.